МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Л. С. Шихобалов

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2015

УДК 512.643

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент *А. З. Веселовская* (С.-Петерб. гос. ун-т),
канд. физ.-мат. наук, доцент *С. К. Соболев* (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Печатается по рекомендации Ученого совета математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Шихобалов Л. С. Матрицы и определители. – СПб., 2015. – 55 с.

В пособии излагается начальная глава курса линейной алгебры, читаемого автором на экономическом факультете СПбГУ. Рассматриваются действия над матрицами и свойства определителей.

Для студентов всех специальностей экономического факультета СПбГУ.

1. Матрицы (основные понятия)

Определение. ***Матрицей*** *называется прямоугольная таблица, составленная из чисел или других математических величин. Величины, составляющие матрицу, называются ее* ***элементами***.

О матрице, имеющей m строк и n столбцов, говорят как о матрице строения $m\times n$, или размера $m\times n$, или порядка $m\times n$. Такая матрица состоит из mn элементов.

Пример. Матрица строения 2×3:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{3 столбца}} \\ \text{2 строки}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -3 & \sin x & a \\ \sqrt{\pi} & b & 0 \end{matrix} \end{array}.$$

Элементы матрицы либо заключают в круглые скобки, либо помещают между двойными вертикальными чертами, например:

$$\begin{pmatrix} -3 & \sin x & a \\ \sqrt{\pi} & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} -3 & \sin x & a \\ \sqrt{\pi} & b & 0 \end{Vmatrix}.$$

Мы будем заключать элементы матрицы в круглые скобки.

Матрицы принято обозначать заглавными латинскими буквами, а их элементы — соответствующими строчными буквами. Каждый элемент матрицы наделяется двумя индексами, обозначающими номер строки и номер столбца, на пересечении которых находится элемент (первый индекс — номер строки, второй — номер столбца). Например, элемент a_{23} (читается «a два-три») находится на пересечении второй строки и третьего столбца матрицы.

Общий вид матрицы строения $m\times n$ (имеющей m строк и n столбцов):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где многоточия обозначают не выписанные в явном виде элементы матрицы. Для краткости, это записывают так: $A = (a_{ij})$. Строение матрицы может быть указано в виде нижнего индекса: $A_{m\times n}$ или $(a_{ij})_{m\times n}$ (здесь индекс i принимает целочисленные значения от 1 до m, индекс j — от 1 до n).

Определение. *Матрица, имеющая одинаковое количество строк и столбцов, называется* ***квадратной***. *Для квадратной матрицы число* $m = n$ *называется ее* ***порядком***.

Определение. ***Главной диагональю*** *квадратной матрицы называется ее диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний. Вторая диагональ квадратной матрицы называется* ***побочной***.

Пример. Главная (*а*) и побочная (*б*) диагонали квадратной матрицы третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

а *б*

Обратим внимание на то, что любой элемент матрицы, принадлежащий ее главной диагонали, находится на пересечении строки и столбца с одинаковыми номерами, поэтому элементы главной диагонали матрицы имеют одинаковые индексы: a_{11}, a_{22}, a_{33} и т. д.

Понятие главной диагонали матрицы используется иногда и для не квадратных матриц. В этом случае главную диагональ матрицы образуют элементы, имеющие одинаковые индексы. Например, главные диагонали следующих двух матриц образованы элементами, обозначенными звездочками:

$$\begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & * \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Понятие побочной диагонали для не квадратных матриц не вводится.

Определение. *Квадратная матрица называется* ***диагональной***, *если все ее элементы, находящиеся вне главной диагонали, равны нулю, то есть* $a_{ij} = 0$ *при всех* $i \neq j$.

Общий вид диагональной матрицы порядка n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где a_{ii} — любые числа (в том числе некоторые могут быть нулями).

Определение. *Квадратная матрица называется* ***верхнетреугольной***, *если все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, то есть если* $a_{ij} = 0$ *при всех* $i > j$, *и называется* ***нижнетреугольной***, *если все ее элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю, то есть если* $a_{ij} = 0$ *при всех* $i < j$. *Вместе все такие матрицы называются* ***треугольными.***

Общий вид верхнетреугольной (*а*) и нижнетреугольной (*б*) матриц:

$$а)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad б)\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — любые числа (в том числе некоторые могут быть равны нулю).

Определение. ***Единичной*** *матрицей называется квадратная диагональная матрица* (*любого порядка*), *все диагональные элементы которой равны единице*.

Единичную матрицу обозначают обычно латинскими буквами E или I. Мы будем пользоваться буквой E. Порядок единичной матрицы указывается, при необходимости, в виде нижнего индекса.

Единичная матрица n-го порядка имеет вид

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Элементы единичной матрицы, как легко убедиться, совпадают с символами Кронекера δ_{ij}, определяемыми формулой

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.2}$$

поэтому $E = (\delta_{ij})$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и им подобные не являются единичными. Причина, по которой именно матрица E указанного выше вида названа единичной, станет ясной из содержания разд. 7.

Определение. *Матрица произвольного строения называется* ***нулевой***, *если все ее элементы равны нулю.*

Нулевую матрицу будем обозначать буквой O; она имеет вид

$$O = O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Определение. *При* $m = n = 1$ *матрица называется* ***одноэлементной***. *При* $m = 1$, $n > 1$ *матрица называется* ***матрицей-строкой*** *или просто* ***строкой***. *При* $m > 1$, $n = 1$ *матрица называется* ***матрицей-столбцом*** *или просто* ***столбцом***.

Примеры:

(a) – одноэлементная матрица, $m = n = 1$;

$(1 \quad 0 \quad 3 \quad 5)$ – матрица-строка, $m = 1$, $n = 4$;

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, $m=4$, $n=1$.

Отметим, что не следует путать одноэлементную матрицу, то есть таблицу, состоящую из одного элемента, и сам этот элемент, то есть число. Поэтому, например, $(2) \neq 2$, и вообще $(a) \neq a$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только матрицы, все элементы которых принимают вещественные значения. Множество вещественных чисел будем обозначать через R. Свойства вещественных чисел считаем известными.

2. Операции над матрицами

Определение. *Матрицы* A *и* B *называются* ***равными***, *если они имеют одинаковое строение и все их соответственные элементы попарно равны, то есть при* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{p\times q}$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p = m \\ q = n \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \text{при} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{cases}.$$

Внимание! Равными могут быть матрицы только одинакового строения. Поэтому, например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение. ***Суммой*** *матриц* A *и* B *одинакового строения называется матрица того же строения, обозначаемая* $A + B$, *каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц* A *и* B, *то есть если* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B = (b_{ij})_{m\times n}$, *то*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение. ***Разность*** *матриц* A *и* B *одинакового строения, обозначаемая* $A - B$, *определяется аналогично: если* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B = (b_{ij})_{m\times n}$, *то*

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение. *Операции составления суммы и разности матриц называются соответственно* ***сложением*** *и* ***вычитанием*** *матриц.*

Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Внимание! Операции сложения и вычитания матриц определены только для матриц одинакового строения. Поэтому, к примеру, сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ не определена.

Свойства операции сложения матриц

В силу того, что матрица-сумма строится из матриц-слагаемых поэлементно, операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения чисел. А именно, имеют место следующие равенства:

1) $A + B = B + A$ для любых матриц A и B одинакового строения (переместительное или коммутативное свойство операции сложения матриц);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых матриц A, B и C одинакового строения (сочетательное или ассоциативное свойство);

3) $A + O = A$; $A - A = O$ для любой матрицы A, где O — нулевая матрица того же строения, что и матрица A.

Первые два свойства позволяют не писать скобки в выражениях, содержащих сумму нескольких матриц, и не заботиться о порядке следования слагаемых в этих выражениях. Например, $A + (B + C) = A + B + C = A + C + B = C + B + A$.

Определение. ***Произведением матрицы** A **на число** λ называется матрица, обозначаемая λA или $A\lambda$, которая имеет то же строение, что и A, и получается умножением всех элементов матрицы A на это число, то есть если $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $\lambda \in R$, то*

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})_{m\times n} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение. *Операция составления произведения матрицы на число называется **умножением** матрицы на число.*

Пример:

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -9 \\ -6 & -15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

Непосредственно из определения операции умножения матрицы на число ясно, что эта операция обладает следующими свойствами:

1) сочетательным свойством относительно произведения чисел:

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

2) распределительным свойством относительно суммы чисел:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

3) распределительным свойством относительно суммы матриц:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

здесь λ и μ — числа, A и B — матрицы одинакового строения.

Из определений операции вычитания матриц и операции умножения матрицы на число следует, что

$$A - B = A + (-1)B.$$

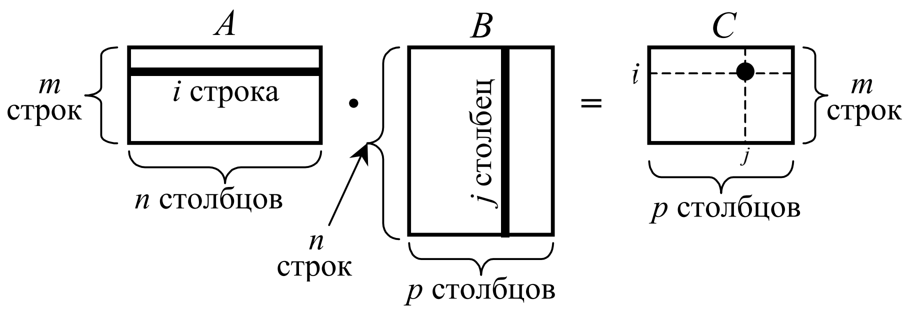
Определение. ***Произведением*** *матрицы* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, *имеющей* m *строк и* n *столбцов, на матрицу* $B = (b_{ij})_{n\times p}$, *имеющую* n *строк и* p *столбцов, называется матрица* $C = (c_{ij})_{m\times p}$, *имеющая* m *строк и* p *столбцов, которая обозначается через* $A{\cdot}B$ *и каждый элемент которой находится по формуле*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad (2.1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, p$.

Определение. *Операция составления произведения матриц называется* ***умножением*** *или* ***перемножением*** *матриц.*

Правило вычисления элементов в произведении двух матриц можно схематически изобразить так:



Для вычисления элемента c_{ij}, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы C, берутся i-я строка первого сомножителя и j-й столбец второго сомножителя. Составляется произведение двух элементов: первого элемента i-й строки первого сомножителя (a_{i1}) и верхнего элемента j-го столбца второго сомножителя (b_{1j}). К этому произведению прибавляется произведение второго элемента i-й строки (a_{i2}) и второго сверху элемента j-го столбца (b_{2j}). Далее к полученной сумме прибавляется аналогичное произведение третьих элементов i-й строки и j-го столбца и так далее, вплоть до произведения последнего элемента i-й строки (a_{in}) и нижнего элемента j-го столбца (b_{nj}). Так как, по определению произведения матриц, количество столбцов первого сомножителя равняется количеству строк второго сомножителя, то при такой процедуре не остается лишних элементов ни в i-й строке, ни в j-м столбце. В результате мы получаем элемент c_{ij} матрицы C, задаваемый формулой (2.1). Аналогичным образом вычисляются все элементы этой матрицы. Отметим, что матрица-произведение $C = A{\cdot}B$ имеет число строк такое же, как у первого сомножителя A, и число столбцов такое же, как у второго сомножителя B.

Примеры. Перемножить матрицы.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Произведение $A{\cdot}B$ имеет смысл, так как количество столбцов первого сомножителя, равное трем, совпадает с количеством строк второго сомножителя. Перемножим матрицы в соответствии с формулой (2.1):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 7 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 8 + 5\cdot(-2) + 6\cdot 7 & 4\cdot(-1) + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 & 4\cdot 1 + 5\cdot 4 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 12 & 9 \\ 64 & 24 & 24 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что произведение $B{\cdot}A$ не определено, потому что количество столбцов матрицы B равно трем, а количество строк матрицы A равно двум.

2) $A = (1 \;\; 2 \;\; 3)$ и $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

С помощью формулы (2.1) находим:

$$A \cdot B = (32), \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Оба произведения, $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$, здесь имеют смысл, но являются различными матрицами (даже различных порядков).

В н и м а н и е! 1) Операция умножения матриц определена не для любых пар матриц, а только для таких, у которых *количество столбцов первого сомножителя совпадает с количеством строк второго сомножителя*.

2) Операция умножения матриц, вообще говоря, не обладает свойством коммутативности, то есть в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, поэтому *при перемножении матриц нельзя менять их местами*.

Слова «вообще говоря» и «в общем случае» означают, что бывают ситуации, когда $A \cdot B = B \cdot A$. Об этом будет сказано подробнее далее.

3) Произведение двух ненулевых матриц может быть равно нулевой матрице (это отличает матрицы от чисел, так как произведение двух отличных от нуля чисел не может равняться нулю). Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Свойства операции умножения матриц

1) Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы матриц: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $D \cdot (F + K) = D \cdot F + D \cdot K$.

2) Сочетательное свойство (ассоциативность): $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3) Возможность умножения на числовой коэффициент любого из сомножителей: $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Здесь A, B, C, D, F и K — матрицы; λ — число; предполагается, что все выписанные выше выражения существуют. Эти свойства могут быть доказаны с помощью формулы (2.1).

Определение. *Матрицы A и B, для которых определены произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ и выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$, называются* ***коммутирующими*** *или* ***перестановочными***.

О таких матрицах говорят также, что они коммутируют.

Теорема 2.1. *Равенство $A \cdot B = B \cdot A$ может иметь место только в случае, когда обе матрицы A и B квадратные одного порядка.*

Доказательство. Пусть даны матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{p \times q}$ и имеет место равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Для существования произведения $A \cdot B$ необходимо выполнение условия $n = p$, а для существования $B \cdot A$ необходимо выполнение условия $q = m$. При соблюдении этих условий матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ имеют соответственно строение $m \times q$ и $p \times n$. Равенство матриц возможно только в случае, когда они имеют одинаковое строение, поэтому из равенства $A \cdot B = B \cdot A$ следует, что $m = p$ и $q = n$. Итак, мы получили: $n = p$, $q = m$, $m = p$ и $q = n$. Отсюда вытекает, что $m = n = p = q$. А так как матрицы A и B имеют соответственно строение $m \times n$ и $p \times q$, то на основании данной цепочки равенств заключаем, что действительно A и B представляют собой квадратные матрицы одного порядка. Этим доказательство завершается.

Обратим внимание на то, что теорема 2.1 устанавливает условие необходимое, но не достаточное для коммутирования матриц. Другими словами, *не все квадратные матрицы одного порядка коммутируют*.

Примеры. 1) Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

коммутируют, так как

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) В случае матриц

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

поскольку $C{\cdot}D \neq D{\cdot}C$, то матрицы C и D не коммутируют.

Определение. ***Линейной комбинацией*** *матриц* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *одного и того же строения называется выражение вида*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k, \tag{2.2}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *— произвольные числа, именуемые коэффициентами*; k *— целое число, не меньшее двух.*

Из определений операций сложения матриц и умножения матрицы на число вытекает, что для матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$ одного строения выражение (2.2) определено и является матрицей того же строения.

Пусть A — произвольная квадратная матрица. По определению, вводятся степени матрицы A:

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A{\cdot}A, \quad A^3 = A{\cdot}A{\cdot}A, \quad \ldots,$$

где E — единичная матрица такого же порядка, что и A (матрица E имеет вид (1.1)).

Понятно, что для любой квадратной матрицы A произведение ее на себя существует и является квадратной матрицей того же порядка. Это произведение еще раз можно умножить на матрицу A, и снова получится квадратная матрица того же порядка. И так можно поступать любое число раз. Результатом всегда будет квадратная матрица такого же порядка, какой имеет матрица A. В силу ассоциативности операции умножения матриц, произведение $A{\cdot}A{\cdot}\ldots{\cdot}A$ (при любом числе сомножителей) не зависит от способа расстановки в нем скобок, поэтому при рассмотрении степеней квадратной матрицы скобки не пишут.

Легко убедиться в том, что для степеней квадратной матрицы выполняются следующие зависимости, аналогичные имеющим место для степеней чисел:

$$A^k \cdot A^l = A^l \cdot A^k = A^{k+l}; \quad (A^k)^l = (A^l)^k = A^{kl},$$

где k и l — любые целые неотрицательные числа.

Определение. *Пусть заданы квадратная матрица A и многочлен от переменной x*

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — числовые коэффициенты. Тогда выражение

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + a_2A^{m-2} + \ldots + a_{m-2}A^2 + a_{m-1}A + a_mE \tag{2.3}$$

называется ***многочленом от матрицы*** *A (здесь $E = A^0$ — единичная матрица того же порядка, что и матрица A).*

Из сказанного выше относительно степеней матрицы и линейной комбинации матриц вытекает, что для любой квадратной матрицы A выражение (2.3) определено и представляет собой квадратную матрицу такого же порядка, каков порядок матрицы A. Обратим внимание на то, что в многочлене от матрицы последнее слагаемое имеет вид a_mE (а не просто a_m, как в многочлене от переменной x). Это связано с тем, что все остальные слагаемые являются матрицами, поэтому к ним нельзя прибавить число, а только другую матрицу того же порядка. Многочлен от матрицы называют также матричным многочленом.

Пример. Найти значение матричного многочлена

$$f(A) = A^3 - 2A^2 + 3A - 4E, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала находим степени матрицы:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + (-8)\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + (-8)\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 7\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Затем вычисляем матричный многочлен:

$$f(A) = A^3 - 2A^2 + 3A - 4E =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -22\\ 11 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 16\\ -8 & -14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -6\\ 3 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -12\\ 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Здесь единичная матрица E взята второго порядка, потому что такой порядок имеет матрица A. Заметим, что при вычислении многочлена мы сначала внесли все числовые множители вместе со знаками внутрь матриц и только затем сложили матрицы. Такой способ вычисления позволяет уменьшить вероятность сделать ошибку при суммировании матриц, так как при этом производится сложение матриц без числовых множителей.

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix}-8 & -12\\ 6 & 4\end{pmatrix}$.

Определение. *Пусть дана матрица строения $m{\times}n$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Матрица строения $n{\times}m$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times m},$$

получающаяся из A заменой строк на столбцы с сохранением порядка их следования, называется ***матрицей, транспонированной по отношению к матрице*** *A.*

Определение. *Операция перехода от матрицы A к матрице A' называется* ***транспонированием***.

Матрицу A', транспонированную по отношению к матрице A, называют также матрицей, транспонированной к A, или транспонированной с A, или просто транспонированной матрицей A. Для обозначения транспонированной матрицы используют наряду с символом A' также символы $A^{\text{т}}$, $A^{\text{тр}}$ или A^{*}. Элементы транспонированной матрицы принято обозначать строчной буквой со штрихом, например, $A' = (a'_{ij})$.

Для перехода от матрицы A к транспонированной матрице A' нужно взять первую строку матрицы A и записать ее в качестве первого столбца матрицы A'. Затем вторую строку матрицы A нужно записать в качестве второго столбца матрицы A', и так следует поступить последовательно со всеми строками матрицы A.

Примеры.

1) Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, то $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, то $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$ — некоторая матрица и $A' = (a'_{ij})_{n\times m}$ — транспонированная к ней матрица. Из определения транспонированной матрицы вытекает, что в матрице A' на пересечении i-й строки и j-го столбца находится элемент, стоящий в матрице A на пересечении j-й строки и i-го столбца. Поэтому элементы транспонированной матрицы удовлетворяют следующему условию:

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \ldots, n; \;\; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.4}$$

Очевидно, что верно и обратное утверждение: если выполняется условие (2.4), то матрица $A' = (a'_{ij})_{n\times m}$ является матрицей, транспонированной по отношению к матрице $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Отсюда следует, что условие (2.4) эквивалентно приведенному выше определению транспонированной матрицы, поэтому оно само может рассматриваться в качестве такого определения.

Свойства операции транспонирования матрицы

1) $(A')' = A$ для любой матрицы A.
2) $A = B \Leftrightarrow A' = B'$, где A и B — матрицы.
3) $(A \pm B)' = A' \pm B'$ для любых матриц A и B одного строения.
4) $(\lambda A)' = \lambda A'$ для произвольных матрицы A и числа λ.
5) Если существует произведение матриц $A\cdot B$, то

$$(A\cdot B)' = B'\cdot A'. \tag{2.5}$$

Внимание! Согласно формуле (2.5), матрица, транспонированная к произведению матриц, равна произведению транспонированных матриц, *взятых в обратном порядке*.

Справедливость свойств 1 – 4 вытекает непосредственно из определения транспонированной матрицы и определений соответствующих операций.

Доказательство свойства 5. Рассмотрим матрицы A и B, для которых существует произведение $A\cdot B$. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Из существования произведения $A\cdot B$ следует, что матрица B имеет количество строк, равное количеству столбцов матрицы A, поэтому $B = (b_{ij})_{n\times p}$. В таком случае, согласно определению транспонированной матрицы, $A' = (a'_{ij})_{n\times m}$ и $B' = (b'_{ij})_{p\times n}$. Отсюда видно, что количество строк матрицы A' совпадает с количеством столбцов матрицы B', следовательно, существует произведение $B'\cdot A'$. Кроме того, так как транспонировать можно любую матрицу, то из существования матрицы $A\cdot B$ вытекает существование матрицы $(A\cdot B)'$.

Итак, матрицы $A\cdot B$, $(A\cdot B)'$ и $B'\cdot A'$ определены. Их элементы обозначим через x_{ij}, x'_{ij} и y_{ij} соответственно. При указанном строении матриц A и B имеем: $A\cdot B = (x_{ij})_{m\times p}$, $(A\cdot B)' = (x'_{ij})_{p\times m}$ и $B'\cdot A' = (y_{ij})_{p\times m}$. На основании формулы (2.1) можем записать:

$$x_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{при всех } i \text{ и } j. \qquad (*)$$

Из (2.4) вытекает, что

$$x'_{ij} \;=\; x_{ji} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} \quad \text{при всех } i \text{ и } j, \qquad (**)$$

где для x_{ji} использовано выражение $(*)$ с переменой в нем местами индексов i и j.

Так как y_{ij} — элементы матрицы $B'\cdot A'$, то, согласно (2.1),

$$y_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} \quad \text{при всех } i \text{ и } j, \qquad (***)$$

где мы поменяли местами b'_{ik} и a'_{kj}, воспользовавшись тем, что элементы матрицы — числа, а в произведении чисел можно менять местами сомножители. Правые части выражений $(**)$ и $(***)$ равны, значит, равны и их левые части. Следовательно, $x'_{ij} = y_{ij}$, причем это равенство выполняется при любых i и j (здесь $i = 1, 2, \ldots, p$ и $j = 1, 2, \ldots, m$, потому что матрицы $(A\cdot B)'$ и $B'\cdot A'$ имеют строение $p\times m$). Отсюда, по определению равенства матриц, заключаем: $(A\cdot B)' = B'\cdot A'$, что и требовалось доказать.

Свойство 5 может быть обобщено на случай произвольного числа сомножителей. Например, если произведение матриц $A\cdot B\cdot C\cdot D$ определено, то

$$(A\cdot B\cdot C\cdot D)' \;=\; D'\cdot C'\cdot B'\cdot A'.$$

Подчеркнем, что в правой части равенства стоит произведение транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

Определение. *Квадратная матрица A называется* ***симметричной****, если транспонированная к ней матрица A' совпадает с A, то есть если $A' = A$.*

Определение. *Квадратная матрица A называется* ***антисимметричной*** *или* ***кососимметричной****, если транспонированная к ней матрица A' равняется матрице A с противоположным знаком: $A' = -A$.*

Теорема 2.2. *Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ является симметричной тогда и только тогда, когда*

$$a_{ij} \;=\; a_{ji} \;\; \textit{при всех } i \textit{ и } j, \qquad (2.6)$$

и является антисимметричной тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} \;=\; -a_{ji} \;\; \textit{при всех } i \textit{ и } j. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица и $A' = (a'_{ij})$ — транспонированная к ней матрица. Согласно определению симметричной матрицы, $A' = A$. Отсюда, по определению равенства матриц,

$$a'_{ij} = a_{ij} \text{ при всех } i \text{ и } j.$$

Вместе с тем, из формулы (2.4) следует, что

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Итак, мы получили два равенства, левые части которых одинаковы. Поэтому одинаковы и их правые части, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i и j. А это есть условие (2.6). Таким образом, из симметричности матрицы A вытекает условие (2.6).

Теперь, наоборот, пусть выполняется условие (2.6). На основании этого условия и формулы (2.4) заключаем, что $a'_{ij} = a_{ij}$ при всех i и j. Следовательно, $A' = A$. Таким образом, из условия (2.6) вытекает симметричность матрицы A. Этим доказано утверждение теоремы, касающееся симметричной матрицы A.

В случае антисимметричной матрицы A имеем: $A' = –A$, поэтому

$$a'_{ij} = -a_{ij} \text{ при всех } i \text{ и } j.$$

Согласно (2.4), здесь, как и в предыдущем случае,

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Из этих двух равенств заключаем, что $a_{ij} = -a_{ji}$ при всех i и j, то есть для антисимметричной матрицы A действительно выполняется условие (2.7). Теперь пусть, наоборот, верно условие (2.7). Из этого условия и формулы (2.4) находим: $a'_{ij} = -a_{ij}$ при всех i и j, то есть $A' = –A$. Значит, A — антисимметричная матрица. Следовательно, теорема верна и в случае антисимметричной матрицы.

Из теоремы 2.2 следует, что условия (2.6) и (2.7) эквивалентны приведенным выше определениям соответственно симметричной и антисимметричной матрицы, поэтому они сами могут быть использованы в роли этих определений.

Отметим, что понятия симметричности и антисимметричности не могут быть введены для не квадратных матриц, так как для них всегда $A' \neq \pm A$, из-за различного строения A и A'.

Примеры. Симметричная (*а*) и антисимметричная (*б*) матрицы:

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих примеров видно, что матрица является симметричной (антисимметричной) относительно своей главной диагонали.

Рассмотрим антисимметричную матрицу $A = (a_{ij})$. Согласно теореме 2.2, ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$ при всех i и j. В частности, это условие выполняется для всех элементов главной диагонали матрицы. Такие элементы имеют одинаковые индексы, поэтому $a_{ii} = -a_{ii}$ при всех i. Перенесем в этом равенстве величину a_{ii} из правой части в левую. Тогда получим: $2a_{ii} = 0$. Отсюда вытекает, что $a_{ii} = 0$ при всех i. Следовательно, *все элементы главной диагонали антисимметричной матрицы равны нулю*.

Примеры:

$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{matrix}\text{антисимметричная} \\ \text{матрица}\end{matrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{matrix}\text{не антисимметричная} \\ \text{матрица}\end{matrix}$.

Теорема 2.3. *Любую квадратную матрицу можно следующим образом представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц*:

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A'), \tag{2.8}$$

где первое слагаемое в правой части равенства представляет собой симметричную матрицу, а второе слагаемое — антисимметричную матрицу.

Доказательство. Прежде всего, раскрывая скобки в равенстве (2.8), убеждаемся, что оно является верным.

Теперь докажем симметричность первого слагаемого в правой части равенства. Рассмотрим матрицу, транспонированную к этому слагаемому, и произведем над ней следующие преобразования:

$$\left(\tfrac{1}{2}(A + A')\right)' = \tfrac{1}{2}(A + A')' = \tfrac{1}{2}(A' + (A')') = \tfrac{1}{2}(A' + A) = \tfrac{1}{2}(A + A'),$$

здесь использованы последовательно: четвертое, третье и первое свойства операции транспонирования матрицы и коммутативность операции сложения матриц. Из этой цепочки равенств вытекает, что

$$\left(\tfrac{1}{2}(A + A')\right)' = \tfrac{1}{2}(A + A').$$

Отсюда заключаем на основании определения симметричной матрицы, что первое слагаемое в правой части равенства (2.8) действительно является симметричной матрицей.

Аналогичным образом для второго слагаемого можем записать:

$$\left(\tfrac{1}{2}(A - A')\right)' = \tfrac{1}{2}(A - A')' = \tfrac{1}{2}(A' - (A')') = \tfrac{1}{2}(A' - A) = -\tfrac{1}{2}(A - A'),$$

поэтому

$$\left(\tfrac{1}{2}(A - A')\right)' = -\tfrac{1}{2}(A - A').$$

Значит, второе слагаемое в правой части равенства (2.8) — действительно антисимметричная матрица. На этом доказательство теоремы завершается.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, в согласии с формулой (2.8), представление матрицы A в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. ***Следом*** *квадратной матрицы* $A = (a_{ij})_n$, *обозначаемым* $\mathrm{sp}A$, *называется сумма элементов ее главной диагонали*:

$$\mathrm{sp}A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}.$$

След матрицы обозначают также символами $\mathrm{Sp}A$, $\mathrm{tr}A$ или $\mathrm{Tr}A$. Эти символы происходят от немецкого слова *Spur* и английского *trace*, означающих *след*.

Примеры: 1) $\mathrm{sp}E_n = n$,

где E_n — единичная матрица порядка n (см. формулу (1.1)).

2) $$\mathrm{sp}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + (-9) = -3.$$

3. Определители 1-го, 2-го и 3-го порядков

В этом разделе рассматриваются только квадратные матрицы.

Определение. *Пусть* $A = (a)$ — *квадратная матрица первого порядка, то есть одноэлементная матрица.* ***Определителем*** *или* ***детерминантом*** *этой матрицы, обозначаемым* Δ *или* $\det A$, *называется число, равное ее элементу*:

$$\Delta = \det A = a. \tag{3.1}$$

Пример: $\det(-2{,}5) = -2{,}5$.

Определение. ***Определителем*** *или* ***детерминантом*** *квадратной матрицы второго порядка*

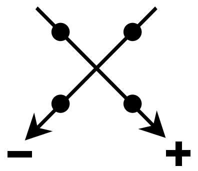
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, равное разности произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали; это число обозначается Δ, $\det A$ *или вертикальными чертами*:

$$\Delta = \det A = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.2}$$

Отметим, что в формуле (3.2) значение определителя задается последним выражением, остальные выражения представляют собой лишь разные виды обозначения определителя.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы второго порядка, схематично можно изобразить так:



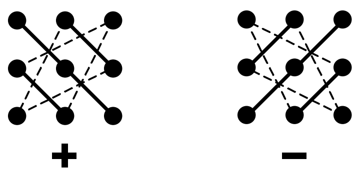
На этой схеме черные кружки обозначают элементы матрицы. Одно произведение элементов берется со знаком плюс, другое — со знаком минус.

Пример: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 3\cdot 6 = -2\,.$

Определение. ***Определителем*** *или* ***детерминантом*** *квадратной матрицы третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, которое может быть получено из элементов матрицы по так называемому правилу диагоналей и треугольников или правилу Саррюса:



$$\Delta = \det A = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \quad (3.3)$$

Определитель представляет собой сумму шести слагаемых, три из которых берутся со знаком плюс и три — со знаком минус. Каждое слагаемое есть произведение трех элементов матрицы. Произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, и два произведения элементов, расположенных в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и с вершинами в противоположных углах, берутся со знаком плюс (см. схему). Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Так составленная сумма из шести слагаемых (из которых три взяты с плюсом, а другие три — с минусом) и есть определитель квадратной матрицы третьего порядка.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно формуле (3.3),

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= 5 - 8 + 12 + 3 - 20 - 8 = -16.$$

Для того чтобы ввести понятие определителя квадратной матрицы произвольного порядка, нам потребуются сведения из теории перестановок.

4. Некоторые сведения из теории перестановок

Определение. *Пусть имеется n различных объектов.* ***Перестановкой*** *из n объектов называется любое расположение их в определенном порядке.*

Пример. Пусть даны треугольник △, квадрат □ и круг ○. Тогда

△ □ ○ и □ ○ △ — две различные перестановки этих объектов.

Занумеровав n заданных объектов натуральными числами, можно свести их перестановку к перестановке чисел 1, 2, …, n. Так, например, если поставить в соответствие треугольнику △ число 1, квадрату □ число 2 и кругу ○ число 3, то две перестановки из приведенного выше примера будут иметь вид (1 2 3) и (2 3 1). Поэтому далее будем рассматривать только перестановки чисел 1, 2, …, n.

Итак, *перестановка из n объектов есть любое конкретное расположение целых чисел от* 1 *до n* ($n \geq 2$). Числа, составляющие перестановку, называются ее *элементами*.

В перестановке важны количество элементов и порядок их расположения. Перестановку принято заключать в круглые скобки. Запятые между элементами перестановки не ставятся, а сами элементы разделяются увеличенными пробелами.

Пример: (1 2 3 4 5) и (5 3 4 1 2) — две перестановки из пяти элементов.

В общем виде перестановка из n элементов обозначается так:

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \dots \ \ \alpha_n),$$

где α_i — целые числа от 1 до n, причем все они различные; индекс i обозначает место данного числа в перестановке.

Определение. *Пусть имеется перестановка* $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$ *чисел* $1, 2, \ldots, n$. *Будем говорить, что в этой перестановке два числа* α_i *и* α_j *образуют* ***инверсию***, *если большее число предшествует меньшему, то есть если* $\alpha_i > \alpha_j$ *при* $i < j$.

Пример. В перестановке (2 3 1) образуют инверсию числа 2 и 1, а также 3 и 1.

Определение. *Общее количество пар чисел, образующих инверсию, называется* ***числом инверсий*** *перестановки.*

Число инверсий перестановки $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ будем обозначать $s(\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ или просто s, когда ясно, о какой перестановке идет речь.

Определение. *Перестановка называется* ***чётной***, *если число ее инверсий* s *чётное, и* ***нечётной***, *если число инверсий* s *нечётное.*

Примеры:

$s(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) = 0$ − перестановка четная;

$s(3 \ 1 \ 5 \ 4 \ 2) = 5$ − перестановка нечетная;

$s(5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1) = 10$ − перестановка четная.

Определение. *Операция перехода от одной перестановки к другой, при которой два элемента меняются местами, а остальные остаются на своих местах, называется* ***транспозицией***.

Записывается транспозиция с помощью стрелки. Например:

$$(2 \ 4 \ 3 \ 1) \rightarrow (2 \ 1 \ 3 \ 4);$$

эта транспозиция состоит в перемене местами чисел 1 и 4.

Теорема 4.1. *От любой перестановки из n элементов можно перейти к любой другой перестановке этих же элементов при помощи нескольких последовательно выполненных транспозиций.*

Теорема 4.2. *При осуществлении одной транспозиции четная перестановка переходит в нечетную и, наоборот, нечетная перестановка переходит в четную.*

Доказательства этих теорем имеются в книге [1].

Пример. Перейти от перестановки из четырех элементов (2 3 4 1) к перестановке этих же элементов (1 2 3 4) посредством транспозиций; для каждой перестановки определить число инверсий и наименование (четность или нечетность).

Решение:

$$\underset{\text{нечетная}}{\underset{s=3}{(2 \ 3 \ 4 \ 1)}} \rightarrow \underset{\text{четная}}{\underset{s=4}{(3 \ 2 \ 4 \ 1)}} \rightarrow \underset{\text{нечетная}}{\underset{s=1}{(1 \ 2 \ 4 \ 3)}} \rightarrow \underset{\text{четная}}{\underset{s=0}{(1 \ 2 \ 3 \ 4)}}.$$

Из этого примера видно, что при каждой транспозиции перестановка меняет свое наименование, как и должно быть согласно теореме 4.2. Отметим, что число инверсий может изменяться при одной транспозиции не обязательно на единицу (в частности, в приведенном примере при второй транспозиции оно изменилось на три). Очевидно, что переход между двумя перестановками может быть реализован не единственным способом.

При доказательстве следующей теоремы нам потребуется одна из теорем комбинаторики. Назовем ее леммой.

Лемма. *Общее количество различных перестановок из* n *элементов равно* $n!$

Напомним, что $n!$ (читается «эн-факториал») — это есть, по определению, произведение всех целых чисел от 1 до n: $n! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}n$. Например, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ и т. д. Отсюда видно, что факториал — быстро возрастающая функция.

Пример. Из трех элементов можно составить $3! = 6$ перестановок:

$$(1\ \ 2\ \ 3),\quad (1\ \ 3\ \ 2),\quad (2\ \ 1\ \ 3),\quad (2\ \ 3\ \ 1),\quad (3\ \ 1\ \ 2),\quad (3\ \ 2\ \ 1).$$

Теорема 4.3. *Количество всех четных перестановок из* n *элементов равно количеству всех нечетных перестановок и равно* $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что при любом $n \ge 2$ число $\frac{n!}{2}$ является целым, потому что при $n \ge 2$ в факториале участвует в качестве множителя число 2.

Обозначим через a количество всех четных и через b количество всех нечетных перестановок из n элементов. Так как, согласно лемме, всего имеется $n!$ перестановок из n элементов, то $a + b = n!$ Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $a = b$.

Выпишем столбиком все a четных перестановок. Затем в каждой перестановке поменяем местами первые два числа. Полученные таким способом новые перестановки выпишем рядом в виде такого же столбика:

$$\left.\begin{array}{c}a\text{ штук четных}\\ \text{перестановок}\end{array}\right\{\begin{array}{ccc}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n) & \to & (\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n)\\ (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \ldots\ \beta_n) & \to & (\beta_2\ \beta_1\ \beta_3\ \ldots\ \beta_n)\\ (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \ldots\ \gamma_n) & \to & (\gamma_2\ \gamma_1\ \gamma_3\ \ldots\ \gamma_n)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \ldots\ \omega_n) & \to & (\omega_2\ \omega_1\ \omega_3\ \ldots\ \omega_n)\end{array}\right\}\begin{array}{c}a\text{ штук нечетных}\\ \text{перестановок}\end{array}$$

Новый столбик состоит опять-таки из a перестановок. Поскольку каждая из них получена из исходной четной перестановки с помощью одной транспозиции, то согласно теореме 4.2 все они нечетные. При этом все они различные. В самом деле, если бы среди них нашлись две одинаковые перестановки, то после вторичной перемены местами двух первых чисел в этих перестановках мы пришли бы к двум совпадающим перестановкам в исходном наборе перестановок. А этого не может быть, потому что все первоначальные перестановки различные.

Количество всех нечетных перестановок из n элементов мы обозначили через b. Но так как нет уверенности в том, что во втором столбике (содержащем a различных нечетных перестановок) присутствуют все нечетные перестановки, то мы можем записать пока что только неравенство

$$a \le b.$$

Аналогичным образом, поменяв местами в проведенных рассуждениях роли четных и нечетных перестановок, мы докажем неравенство

$$b \le a.$$

Из двух полученных неравенств следует, что

$$a = b,$$

и теорема 4.3 доказана.

5. Определитель *n*-го порядка

Определение. ***Определителем*** *или* ***детерминантом*** *квадратной матрицы A n-го порядка называется число, равное сумме всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. При этом каждое произведение берется со знаком плюс или минус по следующему правилу.*

Правило для знака. *Возьмем какое-либо из произведений, входящих в состав определителя, и расположим в нем сомножители в порядке следования номеров строк*:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Тогда номера столбцов образуют перестановку $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n)$ *из n элементов. Данное произведение берется со знаком плюс, если эта перестановка четная, и со знаком минус, если она нечетная.*

Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\Delta = \det A = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\alpha_n)} (-1)^{s(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (5.1)$$

где суммирование проводится по всем $n!$ *возможным перестановкам номеров столбцов* ($\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n$).

В первой строке формулы (5.1) выписаны разные виды обозначения определителя, во второй строке — само его значение. Величина

$$(-1)^{s(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\alpha_n)},$$

входящая в формулу (5.1), равняется либо +1, либо –1 (в зависимости от того, является число инверсий s четным или нечетным). Эта величина стоит множителем при каждом слагаемом под знаком суммы и задает знак слагаемого в соответствии со сформулированным выше правилом для знака. Каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и одному из каждого столбца. Всего в состав определителя матрицы n-го порядка входят $n!$ слагаемых. Это количество равно количеству различных перестановок номеров столбцов. Половина слагаемых входит в состав определителя со знаком плюс, другая половина — со знаком минус (так как согласно теореме 4.3 число четных и число нечетных перестановок одинаково).

Нетрудно убедиться в том, что формулы (3.2) и (3.3), задающие значения определителей 2-го и 3-го порядков, представляют собой частные случаи формулы (5.1).

Определитель матрицы n-го порядка будем именовать *определителем n-го порядка* и будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя, понимая под этими терминами соответственно элементы, строки и столбцы матрицы, для которой вычисляется определитель.

Внимание! 1) Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

2) Матрица (числовая) есть таблица чисел; определитель матрицы — число (получаемое из элементов матрицы по формуле (5.1)).

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ – матрица (таблица);} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ – число (равное –16).}$$

Вычисление определителя n-го порядка на основе одного лишь определения — весьма трудоемкий процесс, ибо количество слагаемых, из которых составляется определитель, очень быстро растет с увеличением n. (Поскольку количество слагаемых равно $n!$, то для определителя 4-го порядка имеем 24 слагаемых, для 5-го порядка — 120 слагаемых, для 6-го порядка — 720 слагаемых и т. д.). В дальнейшем будут указаны алгоритмы, позволяющие упростить вычисления. Эти алгоритмы основаны на свойствах определителей.

6. Свойства определителей

Рассмотрим две равные квадратные матрицы. В связи с тем, что равенство матриц определяется как поэлементное, эти матрицы состоят из одних и тех же элементов и фактически представляют собой одну и ту же матрицу. Поэтому определители, составленные из элементов этих матриц по формуле (5.1), являются одним и тем же числом.

Таким образом, *определители равных квадратных матриц равны*, *то есть если A и B — квадратные матрицы одного порядка*, *то*

$$A = B \Rightarrow |A| = |B|.$$

Отметим, что обратное утверждение в общем случае не верно, то есть из выполнения равенства $|A| = |B|$ нельзя заключить, что $A = B$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2. \text{ Поэтому } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \text{ но } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1. *Если все элементы какой-либо строки или столбца квадратной матрицы равны нулю*, *то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица имеет строку (столбец), все элементы которой равны нулю. По определению определителя, каждое слагаемое, входящее в его состав, представляет собой произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Значит, каждое слагаемое включает в себя в качестве сомножителя элемент из строки (столбца), состоящей из нулей, поэтому каждое слагаемое равно нулю. Следовательно, определитель, являющийся суммой этих слагаемых, тоже равен нулю, что и требовалось доказать.

Примеры:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

В справедливости данных равенств можно убедиться, сосчитав определители по правилу диагоналей и треугольников (напомним, что это правило есть частный случай формулы (5.1)).

Свойство 2. *Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Доказательство. Определитель матрицы представляет собой, по определению, сумму произведений ее элементов, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Те из произведений, которые содержат в качестве сомножителя нулевой элемент, равны нулю. Поэтому в случае диагональной матрицы единственное произведение элементов, взятых по одному из каждой строки, которое может быть отличным от нуля, есть произведение, состоящее из одних только диагональных элементов, то есть произведение $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$. А так как в этом произведении элементы матрицы представлены также и по одному из каждого столбца, то оно входит в состав определителя.

В произведении $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ все сомножители расположены в порядке следования номеров строк. При этом номера столбцов образуют перестановку $(1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ n)$. Поскольку эта перестановка четная, то в соответствии с правилом для знака, данное произведение входит в состав определителя со знаком плюс. Все остальные произведения, входящие в состав определителя, включают в себя в качестве сомножителей нулевые элементы матрицы, поэтому все они равны нулю. Таким образом, определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$, что и требовалось доказать.

Пример: $|E| = 1$, где E — единичная матрица (определяемая формулой (1.1)); отметим, что это равенство верно для матрицы E любого порядка.

Свойство 3. *Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, находящихся на главной диагонали*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай. Пусть $A = (a_{ij})$ — нижнетреугольная матрица. Согласно формуле (5.1), имеем:

$$|A| = \sum_{(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n)} (-1)^{s(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}\ldots a_{n\alpha_n}. \qquad (*)$$

Нижнетреугольная матрица определяется условием

$$a_{ij} = 0 \text{ при всех } i < j. \qquad (**)$$

Из этого условия следует, что в правой части формулы (∗) только такие слагаемые могут отличаться от нуля, для которых выполняются одновременно следующие неравенства:

$$\alpha_1 \le 1, \quad \alpha_2 \le 2, \quad \alpha_3 \le 3, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} \le n-1, \quad \alpha_n \le n. \qquad (***)$$

В самом деле, рассмотрим слагаемое, для которого хотя бы одно из этих неравенств не имеет места. Это означает, что при некотором i выполняется неравенство $\alpha_i > i$. В таком случае, в соответствии с условием (∗∗), элемент матрицы $a_{i\alpha_i}$, входящий в данное слагаемое, равен нулю. А так как этот элемент участвует в слагаемом в качестве множителя, то само слагаемое оказывается равным нулю. Поэтому действительно в формуле (∗) могут быть отличными от нуля только такие слагаемые, которые удовлетворяют неравенствам (∗∗∗).

Проанализируем последовательно эти неравенства. Напомним, что фигурирующие в них величины α_i есть номера столбцов матрицы; все они являются целыми числами от 1 до n, причем все принимают различные значения. Поэтому на основании первого из неравенств (∗∗∗) заключаем, что $\alpha_1 = 1$. Из второго неравенства с учетом того, что значение 1 уже занято, вытекает, что $\alpha_2 = 2$. Из третьего неравенства, вследствие занятости значений 1 и 2, получаем: $\alpha_3 = 3$. Продолжая рассуждения далее, приходим к выводу, что $\alpha_i = i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Этот результат позволяет заключить, что среди слагаемых, составляющих определитель, отличным от нуля может быть только слагаемое $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$. В соответствии с правилом для знака, оно входит в состав определителя со знаком плюс. Значит, определитель нижнетреугольной матрицы в самом деле равен произведению ее элементов, находящихся на главной диагонали.

Теперь рассмотрим верхнетреугольную матрицу. Ее определитель тоже выражается формулой (∗). Условие, определяющее такую матрицу, имеет вид

$$a_{ij} = 0 \text{ при всех } i > j.$$

Из этого условия заключаем, что отличными от нуля в формуле (∗) могут быть в данном случае только такие слагаемые, для которых выполняются неравенства

$$\alpha_1 \ge 1, \quad \alpha_2 \ge 2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2} \ge n-2, \quad \alpha_{n-1} \ge n-1, \quad \alpha_n \ge n.$$

Проанализируем эти неравенства, начиная с последнего. Снова воспользуемся тем, что номера столбцов α_i есть целые числа от 1 до n, причем все различные. С учетом этого, из последнего неравенства вытекает, что $\alpha_n = n$. Из предпоследнего неравенства, принимая во внимание, что значение n уже занято, находим: $\alpha_{n-1} = n-1$. На основании следующего неравенства, в силу занятости значений n и $n-1$, получаем, что $\alpha_{n-2} = n-2$. Рассуждая далее таким же образом, мы приходим к выводу, что $\alpha_i = i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, в случае верхнетреугольной матрицы, как и в случае нижнетреугольной матрицы, из всех слагаемых в формуле (∗) отличным от нуля может быть только слагаемое $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$. А так как оно входит в состав определителя со знаком плюс, то на основании сказанного заключаем, что определитель верхнетреугольной матрицы равен этому слагаемому, то есть, как и утверждается, равен произведению диагональных элементов матрицы. Этим доказательство свойства 3 завершено.

Пример:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

Отметим, что сформулированное ранее свойство 2 можно рассматривать как частный случай свойства 3, потому что диагональная матрица является частным случаем треугольной.

Свойство 4. *При транспонировании определитель матрицы не меняется. Другими словами, определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы*:

$$|A'| = |A|,$$

где A — произвольная квадратная матрица; A' — матрица, транспонированная по отношению к матрице A .

Доказательство свойства 4 можно найти в книге [1].

Следствие. *С точки зрения теории определителей строки и столбцы матрицы занимают равноправное положение. Поэтому если некоторое свойство определителей выполняется для строк, то аналогичное свойство имеет место и для столбцов, и, наоборот, если какое-то свойство определителей выполняется для столбцов, то аналогичное свойство имеет место для строк.*

Данное следствие позволяет сократить доказательства теорем, касающихся свойств определителей, так как позволяет ограничиться проведением доказательства либо только для строк, либо только для столбцов.

Свойство 5. *Если в квадратной матрице поменять местами две строки (или два столбца), оставив остальные на своих местах, то определитель полученной матрицы будет равен определителю исходной матрицы с противоположным знаком. Короче: при перемене местами двух строк (или двух столбцов) определитель меняет знак.*

Доказательство свойства 5 имеется в [1].

Свойство 6. *Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть в квадратной матрице $A = (a_{ij})_n$ строки с номерами k и l одинаковы, то есть

$$a_{k1} = a_{l1}, \quad a_{k2} = a_{l2}, \quad \ldots, \quad a_{kn} = a_{ln} \quad (\text{при} \quad k \neq l, \quad 1 \le k \le n, \quad 1 \le l \le n).$$

Поменяем эти строки местами. Тогда мы получим матрицу B, которая ничем не отличается от матрицы A, поэтому $B = A$. Определители равных матриц равны, значит,

$$|B| = |A|.$$

С другой стороны, так как мы поменяли в матрице A местами две строки, то по свойству 5

$$|B| = -|A|.$$

Из полученных равенств вытекает, что $|A| = -|A|$. Перенося здесь величину $|A|$ из правой части в левую, находим: $2|A| = 0$, и, следовательно, $|A| = 0$. Таким образом, определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю. На основании следствия к свойству 4 заключаем, что аналогичное свойство имеет место и для столбцов. Свойство 6 доказано.

Примеры. Вычислить определители по правилу диагоналей и треугольников и проверить выполнение свойств 4 – 6.

Применяя правило диагоналей и треугольников, находим:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10;$$

$$б)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10;$$

$$в)\quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

В примере *а*) одна из матриц, для которых вычисляются определители, является транспонированной по отношению к другой; равенство их определителей демонстрирует выполнение свойства 4.

В примере *б*) второй определитель получен из первого путем перемены местами первой и третьей строк; противоположность их знаков — проявление свойства 5.

В примере *в*) определитель имеет два одинаковых столбца; равенство его нулю — свидетельство справедливости свойства 6.

Для того чтобы сформулировать следующее свойство определителей, необходимо предварительно ввести два новых понятия.

Определение. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *— квадратная матрица n-го порядка* ($n \geq 2$). ***Минором*** M_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы A называется определитель матрицы* $(n-1)$*-го порядка, получающейся из матрицы A в результате изъятия (вычеркивания) i-ой строки и j-го столбца (то есть той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент* a_{ij}*).*

Определение. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} *элемента* a_{ij} *квадратной матрицы A n-го порядка* ($n \geq 2$) *называется минор* M_{ij} *этого элемента, взятый со знаком* $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. Образовать минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ 4-го порядка.

Решение. Вычеркиваем в матрице 2-ю строку и 3-й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{23}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \cancel{a_{43}} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Из оставшихся элементов, сохраняя порядок их расположения, образовываем определитель 3-го порядка. Этот определитель и есть требуемый минор, а взятый со знаком $(-1)^{2+3} = -1$, он является искомым алгебраическим дополнением, поэтому сразу пишем ответ.

Ответ: $$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Внимание! 1) Понятия минора и алгебраического дополнения вводятся только для квадратных матриц.

2) Минор M_{ij}, как и всякий определитель, есть число (поставленное в соответствие элементу матрицы a_{ij}).

3) Алгебраическое дополнение A_{ij} — тоже число, причем оно может отличаться от минора M_{ij} только знаком. Для четной суммы $i + j$ алгебраическое дополнение A_{ij} и минор M_{ij} совпадают, а для нечетной суммы $i + j$ они имеют противоположные знаки (например, $A_{24} = (-1)^{2+4}M_{24} = M_{24}$; $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32}$).

4) Каждому элементу матрицы соответствуют свой минор и свое алгебраическое дополнение, поэтому всего можно образовать столько миноров и алгебраических дополнений, сколько у матрицы имеется элементов.

Свойство минора и алгебраического дополнения. *Минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A не зависят от элементов матрицы, находящихся в i-ой строке и в j-ом столбце.*

Это свойство объясняется тем, что минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij}, в соответствии с их определениями, получаются вычеркиванием в матрице i-ой строки и j-ого столбца. Вследствие этого, элементы матрицы, находящиеся в этих строке и столбце, не участвуют в их образовании. Значит, минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} действительно не зависят от элементов i-ой строки и j-ого столбца.

Следствие. *Две матрицы, различающиеся элементами только одной строки, имеют одинаковые миноры и алгебраические дополнения для всех элементов этой строки. Аналогичное свойство имеет место для столбцов.*

В самом деле, согласно сформулированному выше свойству, миноры и алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы не зависят от самих этих элементов. Следовательно, в случае матриц, указанных в следствии, миноры и алгебраические дополнения элементов их различающихся строк не зависят от самих этих элементов, а определяются только остальными элементами матриц, которые у обеих матриц совпадают. Значит, эти миноры и алгебраические дополнения у обеих матриц одинаковы. Тем самым для строк утверждение доказано. По следствию к свойству 4, подобное свойство выполняется и для столбцов.

Свойство 7. *Пусть* $A = (a_{ij})$ — *квадратная матрица n-го порядка* ($n \geq 2$). *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, то есть*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{6.1}$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, n$. *Эта формула называется* ***разложением определителя*** $|A|$ ***по элементам i-й строки***.

Аналогично имеет место ***разложение определителя*** $|A|$ ***по элементам j-го столбца***:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \tag{6.2}$$

при любом $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство свойства 7 имеется в книге [1]. На практике это свойство используется для вычисления определителей 4-го и более высоких порядков (хотя, конечно, оно имеет место и для определителей 2-го и 3-го порядков). Благодаря этому свойству, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Их вычисление, в свою очередь, может быть сведено к вычислению определителей $(n-2)$-го порядка, и так далее, вплоть до определителей 2-го порядка. Подчеркнем, что вычислять определитель можно путем разложения его по любой строке или любому столбцу.

В некоторых учебниках само данное свойство принимается в качестве определения определителя, то есть он вводится как величина, стоящая в правой части формулы (6.1). (А затем доказывается, что при этом выполняется формула (5.1).)

Пример. Проиллюстрируем свойство 7, вычислив один и тот же определитель 3-го порядка двумя разными способами — разложением по элементам первой строки и разложением по элементам второго столбца.

а) Для определителя 3-го порядка формула (6.1) при $i = 1$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

С помощью этой формулы получаем разложение следующего определителя по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(3\cdot 4 - 5\cdot 3) - 2\cdot((-2)\cdot 4 - 5\cdot 5) + 3\cdot((-2)\cdot 3 - 3\cdot 5) = 0.$$

б) Теперь запишем формулу (6.2) для случая $j = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Пользуясь этой формулой, находим разложение того же определителя по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot((-2)\cdot 4 - 5\cdot 5) + 3\cdot(1\cdot 4 - 3\cdot 5) - 3\cdot(1\cdot 5 - 3\cdot(-2)) = 0.$$

Свойство 8. *Пусть* $A = (a_{ij})$ — *квадратная матрица* n*-го порядка* ($n \ge 2$). *Сумма произведений элементов одной строки матрицы* A *на алгебраические дополнения соответственных элементов другой строки равна нулю*:

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + a_{k3}A_{l3} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0 \qquad (6.3)$$

при $k \ne l$ (k, l — *номера строк*, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le n$).

Аналогично для столбцов:

$$a_{1p}A_{1q} + a_{2p}A_{2q} + a_{3p}A_{3q} + \ldots + a_{np}A_{nq} = 0 \qquad (6.4)$$

при $p \ne q$ (p, q — *номера столбцов*, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le n$).

Доказательство. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу n-го порядка ($n \ge 2$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ln} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где k и l — номера любых двух строк матрицы (полагаем, для определенности, что $k < l$).

Составим матрицу B, у которой все строки, за исключением строки с номером l, в точности такие, как у матрицы A, а в ее l-й строке стоят элементы k-й строки матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ . & . & . & . \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ k\text{-я строка} \\ \\ l\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{array}.$$

Итак, элементы l-й строки матрицы B удовлетворяют равенствам

$$b_{l1} = a_{k1}, \quad b_{l2} = a_{k2}, \quad \dots, \quad b_{ln} = a_{kn}. \qquad (*)$$

Вычислим определитель матрицы B с помощью свойства 7 путем разложения его по элементам l-й строки:

$$|B| = b_{l1}B_{l1} + b_{l2}B_{l2} + \dots + b_{ln}B_{ln} = a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \dots + a_{kn}A_{ln}, \qquad (**)$$

где A_{ij} и B_{ij} — алгебраические дополнения элементов матриц A и B соответственно. В формуле (**) мы заменили b_{li} на a_{ki}, пользуясь равенствами (*) ($i = 1, 2, \dots, n$). Кроме того, мы заменили алгебраические дополнения B_{li} элементов l-й строки матрицы B алгебраическими дополнениями A_{li} элементов l-й строки матрицы A на основании следствия к свойству минора и алгебраического дополнения (принимая во внимание, что матрицы A и B различаются только одной l-й строкой).

В связи с тем, что матрица B имеет две одинаковые строки, ее определитель, по свойству 6, равен нулю: $|B| = 0$. Отсюда и из (**) получаем:

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \dots + a_{kn}A_{ln} = 0.$$

Это равенство представляет собой формулу (6.3). Тем самым для строк свойство 8 доказано. В соответствии со следствием к свойству 4, аналогичное свойство, то есть формула (6.4), имеет место для столбцов. На этом доказательство свойства 8 завершено.

Подчеркнем, что в свойстве 8 принципиальное значение имеет то обстоятельство, что элементы одной строки матрицы умножаются на алгебраические дополнения элементов другой строки (то же для столбцов). Если в формулах (6.3) и (6.4) положить $k = l$ и $p = q$, то в соответствии со свойством 7 в правых частях этих формул будет стоять не нуль, а определитель матрицы A.

Свойство 9. *Если все элементы какой-либо одной строки* (*или одного столбца*) *квадратной матрицы умножить на одно и то же число, то ее определитель также умножится на это число.*

Доказательство. Рассмотрим две квадратные матрицы A и B, которые различаются элементами только k-й строки, причем у матрицы B в k-й строке стоят элементы k-й строки матрицы A, умноженные на одно и то же число c:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы B посредством разложения его по элементам k-й строки:

$$|B| = ca_{k1}B_{k1} + ca_{k2}B_{k2} + \dots + ca_{kn}B_{kn} = c(a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}), \qquad (*)$$

где A_{ij} и B_{ij} — алгебраические дополнения элементов матриц A и B. Мы вынесли здесь общий множитель c за скобки. А также заменили алгебраические дополнения B_{ki} элементов k-й строки матрицы B алгебраическими дополнениями A_{ki} элементов k-й строки матрицы A, пользуясь следствием к свойству минора и алгебраического дополнения (с учетом того, что матрицы A и B различаются только одной k-й строкой).

В правой части формулы (∗) внутри скобок стоит выражение, которое согласно свойству 7 равно определителю матрицы A. Поэтому на основании (∗) имеем:

$$|B| = c|A|.$$

Отсюда заключаем, что свойство 9 выполняется для строк. Значит, оно верно и для столбцов в силу следствия к свойству 4. Свойство 9 доказано.

Из свойства 9 сразу вытекает полезное следствие.

Следствие. *Общий множитель элементов какой-либо одной строки* (*или одного столбца*) *определителя можно выносить за знак определителя. И, наоборот, число, на которое умножается определитель, можно вносить внутрь определителя, умножив на это число все элементы какой-либо одной строки* (*или одного столбца*).

Обратим внимание на то, что согласно свойству 9 выполняется равенство

$$|B| = c|A|,$$

однако при этом

$$B \neq cA,$$

где A и B — те же матрицы, что и в доказательстве свойства 9.

В самом деле, учитывая, что при умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число и что равенство матриц определяется как поэлементное, имеем:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ . & . & . & . \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ . & . & . & . \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nn} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = B,$$

то есть действительно $B \ne cA$. (Этот вывод относится к ситуации, когда $c \ne 1$ и у матрицы A хотя бы один элемент вне k-й строки отличен от нуля; если же $c = 1$ или все элементы матрицы A вне k-й строки нулевые, то, очевидно, выполняется равенство $B = cA$.)

Внимание! В то время как умножение матрицы на число состоит в умножении всех элементов матрицы на это число, умножение определителя на число есть умножение на это число лишь какой-либо одной его строки или одного столбца.

Если A — квадратная матрица n-го порядка, то

$$|cA| = c^n|A|.$$

Эта формула немедленно вытекает из следствия к свойству 9, потому что в соответствии с ним из каждой из n строк определителя $|cA|$ может быть вынесен за его знак множитель c, что и дает в итоге величину $c^n|A|$.

Свойство 10. *Если квадратная матрица A имеет две пропорциональные строки (или два пропорциональных столбца), то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица $A = (a_{ij})_n$ имеет пропорциональные k-ю и l-ю строки ($k \ne l$). Это означает, что

$$a_{l1} = ca_{k1}, \quad a_{l2} = ca_{k2}, \quad \ldots, \quad a_{ln} = ca_{kn}, \tag{$*$}$$

где c — некоторое число. Тогда можем записать:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ln} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \ldots & ca_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \cdot 0 = 0,$$

здесь применены: формулы ($*$), следствие к свойству 9 о вынесении общего множителя элементов строки за знак определителя и свойство 6 о равенстве нулю определителя матрицы, имеющей две одинаковые строки. Отсюда получаем: $|A| = 0$. Это означает, что свойство 10 справедливо для строк, значит, в силу следствия к свойству 4, оно выполняется также для столбцов, что и требовалось доказать.

Свойство 11. *Если все элементы k-й строки квадратной матрицы A n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых*:

$$a_{k1} = b_{k1} + c_{k1}, \quad a_{k2} = b_{k2} + c_{k2}, \quad \ldots, \quad a_{kn} = b_{kn} + c_{kn}, \tag{6.5}$$

то определитель матрицы A равен сумме определителей двух матриц, у которых все элементы, за исключением стоящих в k-й строке, те же, что у матрицы A, а элементами их k-х строк являются соответственно первые и вторые слагаемые в правых частях равенств (6.5), *то есть*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

Аналогичное свойство имеет место для столбцов.

Доказательство. Три матрицы, определители которых фигурируют в формуле (6.6), отличаются друг от друга только k-ми строками, значит, по следствию к свойству минора и алгебраического дополнения, алгебраические дополнения элементов их k-х строк одинаковы. Обозначим эти общие для трех матриц алгебраические дополнения через A_{k1}, A_{k2}, …, A_{kn}. Пользуясь свойством 7, запишем разложение определителя матрицы A по элементам k-й строки:

$$|A| = (b_{k1} + c_{k1})A_{k1} + (b_{k2} + c_{k2})A_{k2} + \ldots + (b_{kn} + c_{kn})A_{kn}.$$

Раскрывая в этом равенстве скобки и группируя отдельно слагаемые, содержащие величины b_{ki}, и отдельно слагаемые, содержащие величины c_{ki}, получаем:

$$|A| = (b_{k1}A_{k1} + b_{k2}A_{k2} + \ldots + b_{kn}A_{kn}) + (c_{k1}A_{k1} + c_{k2}A_{k2} + \ldots + c_{kn}A_{kn}).$$

Здесь два выражения внутри скобок представляют собой разложения двух определителей из правой части формулы (6.6) по элементам k-х строк. Обозначим через B и C матрицы, для которых вычисляются эти определители. Тогда из последнего равенства заключаем: $|A| = |B| + |C|$, то есть формула (6.6) верна. Это означает, что свойство 11 выполняется для строк. Справедливость его для столбцов вытекает из следствия к свойству 4. Свойство 11 доказано.

Подчеркнем, что хотя согласно свойству 11 имеет место равенство

$$|A| = |B| + |C|,$$

но при этом

$$A \neq B + C,$$

где A, B и C — матрицы, участвующие в доказательстве свойства 11. Данное неравенство сразу вытекает из того, что элементы матрицы $B + C$, находящиеся вне k-й строки, равны $2a_{ij}$, а не a_{ij}, как у матрицы A. (Разумеется, если в матрице A все элементы вне k-й строки равны нулю, то будет $A = B + C$.)

Внимание! Определитель суммы матриц в общем случае не равен сумме их определителей, иначе говоря, если F и G — две квадратные матрицы одного порядка, то в общем случае

$$|F+G| \neq |F| + |G|.$$

Пример. Найти значение определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & 4+a \end{vmatrix}.$$

Решение. Представим элементы последнего столбца определителя, равные a, в виде суммы двух слагаемых: $0 + a$. Тогда с помощью свойства 11 можем записать:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0+a \\ 1 & 2 & 0 & 0+a \\ 1 & 2 & 3 & 0+a \\ 1 & 2 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \end{vmatrix}.$$

В правой части этого выражения первый определитель является определителем треугольной матрицы, поэтому, по свойству 3, он равен произведению элементов главной диагонали, то есть равен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Второй определитель имеет пропорциональные первый и последний столбец, значит, по свойству 10, он равен нулю. Поэтому сумма определителей равна 24.

Ответ: $\Delta = 24$.

Свойство 12. *Определитель квадратной матрицы A n-го порядка не изменится, если к элементам одной его строки прибавить соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же произвольное число. Аналогичное свойство имеет место для столбцов.*

Доказательство. Для разнообразия, доказательство этого свойства проведем для столбцов. Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка ($n \geq 2$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

здесь k и l — номера двух произвольных столбцов ($k \neq l$).

Прибавим к элементам k-го столбца матрицы A соответственные элементы l-го столбца, умноженные на одно и то же число c. Определитель полученной таким способом матрицы B может быть вычислен следующим образом:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}+ca_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k}+ca_{2l} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nk}+ca_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ca_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & ca_{2l} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & ca_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| + 0 = |A|,$$

где использованы свойства 11 и 10 для столбцов. Отсюда следует, что $|B| = |A|$. Таким образом, для столбцов свойство 12 доказано. Значит, согласно следствию к свойству 4, оно выполняется также для строк. Этим доказательство завершено.

Использование свойства 12, как и использование свойства 7, позволяет существенно упростить вычисление определителей высших порядков.

При применении свойства 12 вместо длинной фразы «прибавим к элементам одной строки определителя соответственные элементы другой строки» принято говорить более коротко: «прибавим к одной строке определителя другую строку». Отметим, что свойство 12 позволяет не только складывать строки определителя, но и вычитать их, так как вычитание из одной строки другой строки эквивалентно прибавлению к первой строке второй строки, умноженной на минус единицу. (Сказанное относится, конечно, и к столбцам).

Примеры. Продемонстрируем способы вычисления определителей с использованием их свойств.

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54.$$

Здесь свойство 12 применено дважды: при первом преобразовании к 3-ей строке определителя прибавлена 4-я строка и при втором преобразовании к 4-ой строке прибавлена удвоенная 1-я строка. В результате получен определитель треугольной матрицы, который, по свойству 3, равен произведению элементов, находящихся на главной диагонали.

$$2)\ \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 8\cdot 20\cdot 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 800\cdot(5\cdot 1 - 1\cdot 4) = 800.$$

В этом примере на первом шаге мы использовали свойство 12: из 1-го столбца определителя вычли утроенный 4-й столбец. Это позволило получить в 1-м столбце три нулевых элемента. На втором шаге на основе свойства 7 мы разложили определитель по элементам 1-го столбца (при этом, благодаря наличию трех нулевых элементов, разложение фактически состоит всего из одного слагаемого). На третьем шаге мы опять применили свойство 12: из 2-го столбца вычли удвоенный 1-й столбец. В результате получили определитель с единственным ненулевым элементом в первой строке. На четвертом шаге, вновь пользуясь свойством 7, разложили определитель по элементам 1-й строки. Далее, применяя следствие к свойству 9, мы вынесли за знак определителя общий множитель элементов 1-й строки (число 20) и общий множитель элементов 2-й строки (число 5). И, наконец, получили окончательный результат, воспользовавшись определением определителя 2-го порядка.

В данном примере, разумеется, можно было вычислить определитель, используя уже на третьем шаге правило диагоналей и треугольников, но это потребовало бы произвести довольно громоздкие вычисления.

Приведенные примеры демонстрируют два основных метода вычисления определителей высших порядков:

1) преобразование матрицы, для которой вычисляется определитель, к треугольному виду (с использованием свойства 12) и затем вычисление определителя на основе свойства 3;

2) получение с помощью свойства 12 как можно большего количества нулей в какой-либо строке или столбце определителя и последующее разложение его с помощью свойства 7 по элементам этой строки или столбца.

Внимание! При преобразовании определителя можно к его строке прибавить другую строку, умноженную на любое число (при этом, согласно свойству 12, определитель не изменит своего значения). Но нельзя поступать так: к строке, умноженной на некоторое число, прибавлять другую строку. Дело в том, что при таком преобразовании, в соответствии со свойством 9, определитель не сохранит своего значения, а умножится на это число.

Свойство 13. *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B n-го порядка равен произведению их определителей*:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|. \tag{6.7}$$

Доказательство. Так как A и B — квадратные матрицы одного порядка, то определено их произведение $A \cdot B$. Это произведение тоже является квадратной матрицей, поэтому определитель $|A \cdot B|$ существует.

Проведем доказательство свойства 13 применительно к простейшему случаю $n = 2$. (В общем случае схема рассуждений остается той же, но громоздкость выкладок существенно возрастает.)

Итак, пусть A и B — квадратные матрицы 2-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Составим определитель произведения матриц A и B и перемножим под знаком определителя эти матрицы:

$$|A \cdot B| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе оба элемента первой строки представляют собой сумму двух слагаемых. Учитывая это, разложим полученный определитель на сумму двух определителей, пользуясь свойством 11:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Вновь применяя свойство 11, представим каждый из двух определителей в правой части равенства в виде суммы двух слагаемых:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Теперь, используя следствие к свойству 9, вынесем в первом из полученных определителей за его знак общий множитель a_{11} элементов 1-й строки и общий множитель a_{21} элементов 2-й строки. Аналогичным образом поступим с остальными тремя определителями:

$$|A \cdot B| = a_{11}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + a_{12}a_{22}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

В правой части данного равенства первый определитель имеет две одинаковые строки, поэтому, по свойству 6, он равен нулю. Второй определитель представляет собой определитель матрицы B. Третий определитель совпадёт с определителем матрицы B, если в нем переставить местами строки, значит, по свойству 5, он равен определителю матрицы B с противоположным знаком. И, наконец, четвертый определитель равен нулю, так как он имеет две одинаковые строки. Поэтому можем записать:

$$|A \cdot B| = 0 + a_{11}a_{22}|B| - a_{12}a_{21}|B| + 0 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})|B| = |A| \cdot |B|,$$

где учтено, что внутри скобок в предпоследнем выражении стоит определитель матрицы A. Отсюда получаем окончательно: $|A{\cdot}B| = |A|{\cdot}|B|$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$|A| = 4, \quad |B| = 5, \quad |A \cdot B| = 20 = |A| \cdot |B|,$$

что демонстрирует справедливость формулы (6.7).

Свойство 13 может быть распространено, конечно, на случай произвольного числа сомножителей. Например, если матрицы A, B, C и D квадратные одного порядка, то

$$|A{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}D| = |A|{\cdot}|B|{\cdot}|C|{\cdot}|D|.$$

Обратим внимание на то, что хотя в общем случае

$$A{\cdot}B \neq B{\cdot}A,$$

но, тем не менее, для любых квадратных матриц A и B одного порядка выполняется равенство

$$|A{\cdot}B| = |B{\cdot}A|.$$

Действительно, в соответствии с формулой (6.7), можем записать два равенства: $|A{\cdot}B| = |A|{\cdot}|B|$ и $|B{\cdot}A| = |B|{\cdot}|A|$. А так как определитель есть число, то в произведении определителей можно менять местами сомножители, поэтому правые части данных равенств равны. Следовательно, равны и их левые части, значит, в самом деле, $|A{\cdot}B| = |B{\cdot}A|$.

Следующее свойство определителей, завершающее настоящий раздел, опирается на понятия обратной и неособенной матриц. Определения этих понятий, а также доказательство этого свойства будут даны в разделе 7.

Свойство 14. *Определитель матрицы* A^{-1}, *обратной к неособенной квадратной матрице* A, *равен величине*, *обратной к определителю матрицы* A, *то есть*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad \text{\textit{при}} \ |A| \neq 0. \qquad (6.8)$$

7. Обратная матрица

В определении обратной матрицы, которое мы собираемся ввести, большую роль играет единичная матрица E. Напомним, что это есть квадратная диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице. Единичная матрица n-го порядка имеет вид, задаваемый формулой (1.1):

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_n, \qquad (7.1)$$

здесь δ_{ij} — символы Кронекера, определяемые выражением (1.2):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n; \; j = 1, 2, \dots, n. \qquad (7.2)$$

Лемма 1 (основное свойство единичной матрицы). *Единичная матрица E обладает тем свойством, что любая квадратная матрица A того же порядка не изменяется при умножении на нее (причем умножение может быть произведено как слева, так и справа), то есть*

$$A \cdot E = E \cdot A = A, \qquad (7.3)$$

при этом единичная матрица E — единственная матрица, обладающая таким свойством.

Из равенства (7.3) видно, что матрица E играет роль в множестве матриц, аналогичную роли числа 1 в множестве чисел ($a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого числа a). Именно по этой причине матрица E названа *единичной*.

Доказательство. Пусть E — единичная матрица n-го порядка и A — произвольная квадратная матрица того же порядка. Тогда произведения $A \cdot E$ и $E \cdot A$ существуют и тоже представляют собой квадратные матрицы n-го порядка. Введем следующие обозначения для элементов матриц:

$$A = (a_{ij})_n, \quad A \cdot E = (c_{ij})_n.$$

Пользуясь формулой (2.1), задающей произведение матриц, можем записать для элементов матрицы $A \cdot E$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj}, \qquad (*)$$

где учтено, что согласно (7.1) $E = (\delta_{ij})$. Зависимость (*) выполняется для всех элементов матрицы $A \cdot E$ (то есть для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, n$). Из определения символов Кронекера (7.2) вытекает, что в выписанной сумме все слагаемые, содержащие символы Кронекера со значениями индекса k, не равными j, есть нули. Следовательно, в этой сумме может быть отличным от нуля только слагаемое, у которого $k = j$. Поэтому зависимость (∗) может быть переписана в виде

$$c_{ij} = a_{ij}\delta_{jj}.$$

Отсюда, учитывая, что $\delta_{jj} = 1$, получаем равенство

$$c_{ij} = a_{ij}.$$

В связи с тем, что это равенство выполняется при всех i и j, из него, по определению равенства матриц, следует: $A{\cdot}E = A$. Аналогичным способом можно доказать, что $E{\cdot}A = A$. Из этих двух выражений вытекает требуемая формула (7.3).

Остается доказать, что E — единственная матрица, обладающая указанным в лемме свойством. Допустим, что имеется еще одна квадратная матрица F n-го порядка, для которой выполняется зависимость, аналогичная (7.3):

$$A{\cdot}F = F{\cdot}A = A, \tag{**}$$

где A — произвольная квадратная матрица n-го порядка.

На основании доказанного выше свойства единичной матрицы E можем записать: $F = F{\cdot}E$ (потому что из (7.3) следует, что $A = A{\cdot}E$ для любой квадратной матрицы A n-го порядка, в том числе для матрицы F). Вместе с тем, согласно принятому допущению о свойстве матрицы F, выполняется равенство $F{\cdot}E = E$ (ибо $F{\cdot}A = A$ для любой матрицы A n-го порядка, включая матрицу E). Объединяя оба полученные равенства, имеем: $F = F{\cdot}E = E$, откуда $F = E$. Таким образом, любая матрица F, для которой выполняется зависимость (∗∗), совпадает с матрицей E. Это означает, что матрица E действительно является единственной матрицей, удовлетворяющей зависимости (7.3). Лемма доказана.

Определение. *Пусть A — квадратная матрица n-го порядка, E — единичная матрица того же порядка n. Матрица X называется **левой обратной** к матрице A, если*

$$X{\cdot}A = E. \tag{7.4}$$

*Матрица Y называется **правой обратной** к матрице A, если*

$$A{\cdot}Y = E. \tag{7.5}$$

Поскольку в выражениях (7.4) и (7.5) матрицы A и E — квадратные одного порядка n, то в соответствии с правилом умножения матриц матрицы X и Y (если они существуют) также являются квадратными матрицами n-го порядка. Отметим, что введение двух отдельных определений для левой и правой обратных матриц оправдано, так как в общем случае $X{\cdot}A \neq A{\cdot}X$ (из-за некоммутативности произведения матриц).

Лемма 2 (о равенстве левой и правой обратных матриц). *Если существуют матрицы X и Y, соответственно левая и правая обратные к квадратной матрице A, то они совпадают*:

$$X = Y.$$

Доказательство. Допустим, что существуют матрицы X и Y, соответственно левая и правая обратные к квадратной матрице A. Тогда можем записать следующую цепочку равенств:

$$X = X{\cdot}E = X{\cdot}(A{\cdot}Y) = (X{\cdot}A){\cdot}Y = E{\cdot}Y = Y,$$

здесь при первом преобразовании использовано основное свойство единичной матрицы (7.3); при втором преобразовании применена формула (7.5) (так как матрица Y является правой обратной к A); третье преобразование основано на ассоциативности операции умножения матриц; при четвертом преобразовании учтена формула (7.4) (ибо X — левая обратная к A); и, наконец, при последнем преобразовании вновь применено основное свойство единичной матрицы E. Из данной цепочки равенств заключаем: $X = Y$, что и требовалось доказать.

Итак, согласно лемме 2, если существуют левая X и правая Y обратные матрицы к матрице A, то они представляют собой одну и ту же матрицу. Эту матрицу принято обозначать символом A^{-1} ($= X = Y$); ее называют матрицей, обратной к A. Из формул (7.4) и (7.5) вытекает, что эта матрица удовлетворяет зависимости $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = E$. Сформулируем определение обратной матрицы, основанное на данной зависимости.

Определение. *Пусть A — квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица A^{-1}, для которой выполняется зависимость*

$$A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = E, \tag{7.6}$$

называется ***обратной*** *к матрице A (иногда —* ***двусторонней обратной*** *к A, так как она является одновременно и правой, и левой обратной к A); здесь E — единичная матрица того же порядка n, что и матрица A.*

Определение. *Операция нахождения матрицы A^{-1}, обратной к матрице A, называется* ***обращением*** *матрицы A.*

Термин «обратная» и символ A^{-1}, которые относятся к матрице, удовлетворяющей зависимости (7.6), введены по аналогии с подобными термином и символом, употребляемыми по отношению к числам (число a^{-1} называется обратным к числу a, если $a{\cdot}a^{-1} = a^{-1}{\cdot}a = 1$).

Внимание! 1) *Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц* (так как согласно теореме 2.1 равенство $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A$, входящее в зависимость (7.6), может выполняться только в случае, когда обе перемножаемые матрицы квадратные одного порядка).

2) *Обратные матрицы существуют не для всех квадратных матриц* (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы будет сформулировано далее).

3) *Для матриц символ A^{-1} нельзя заменять символами деления $\frac{1}{A}$ или $1{:}A$* (как это можно делать в случае чисел), так как операция деления на матрицу не вводится; здесь верхний индекс «–1» — символ обратной матрицы, а не показатель степени.

Определение. *Пусть A — квадратная матрица n-го порядка*:

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Обозначим через A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} этой матрицы. Матрицей, **союзной к матрице** A, называется матрица того же порядка*

$$S_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

получающаяся из матрицы A путем замены каждого ее элемента a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij}.

Определение. *Матрицей, **взаимной** или **присоединенной** к квадратной матрице A n-го порядка, называется ее транспонированная союзная матрица*:

$$\widetilde{A} = S'_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}; \tag{7.7}$$

эта матрица является квадратной порядка n, в ее столбцах располагаются алгебраические дополнения элементов соответствующих строк матрицы A.

Теорема 7.1 (о произведении квадратной матрицы и ее взаимной матрицы). *Пусть A — квадратная матрица n-го порядка и $\widetilde{A}$ — взаимная к ней матрица. Тогда*

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = \Delta E, \tag{7.8}$$

где $\Delta = |A|$ — определитель матрицы A; E — единичная матрица n-го порядка.

Доказательство. Пусть A — квадратная матрица n-го порядка и $\widetilde{A}$ — взаимная к ней матрица. Составим произведение $A \cdot \widetilde{A}$:

$$A \cdot \widetilde{A} = (c_{ij})_n = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & A_{j1} & \dots \\ \dots & A_{j2} & \dots \\ . & . & . \\ \dots & A_{jn} & \dots \end{pmatrix},$$

где c_{ij} — элементы матрицы $A \cdot \widetilde{A}$. В правой части этого выражения в первой матрице выписаны только элементы i-й строки, а во второй матрице — только элементы j-го столбца (напомним, что в j-м столбце матрицы $\widetilde{A}$ стоят алгебраические дополнения элементов j-й строки матрицы A). Из этого выражения, в соответствии с правилом умножения матриц, имеем:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда на основании свойств 7 и 8 определителей получаем:

$$c_{ij} = \begin{cases} \Delta & \text{при } i = j \quad (\text{по свойству 7}) \\ 0 & \text{при } i \neq j \quad (\text{по свойству 8}) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}_n = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_n = \Delta E.$$

Таким образом, $A \cdot \widetilde{A} = \Delta E.$ Аналогичным образом доказывается равенство $\widetilde{A} \cdot A = \Delta E$ (при этом используются свойства 7 и 8 для столбцов). Вместе эти равенства дают: $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = \Delta E,$ что и требовалось доказать.

Определение. *Квадратная матрица A называется* ***особенной*** *или* ***вырожденной****, если ее определитель равен нулю*:

$$|A| = 0,$$

и называется ***неособенной*** *или* ***невырожденной****, если ее определитель отличен от нуля*:

$$|A| \neq 0.$$

Теорема 7.2 (о существовании обратной матрицы). *Особенные матрицы обратных матриц не имеют. Всякая неособенная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, равную*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\widetilde{A} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

где $\Delta = |A|$ — *определитель матрицы* A; $\widetilde{A}$ — *матрица, взаимная к* A (*она определяется формулой* (7.7)); A_{ij} — *алгебраические дополнения элементов* a_{ij} *матрицы* A.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы 7.2 в три этапа.

1) Пусть A — особенная матрица, то есть $|A| = 0$. Покажем, что не существует матрицы A^{-1}, обратной к A. Воспользуемся для этого методом доказательства от противного.

Допустим, что существует матрица X, левая обратная к матрице A. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$1 = |E| = |X \cdot A| = |X|\,|A| = |X| \cdot 0 = 0,$$

здесь первое равенство отражает тот факт, что определитель единичной матрицы E есть единица (напомним, что по свойству 2 определителей диагональная матрица имеет определитель, равный произведению ее диагональных элементов); во втором равенстве учтено, что матрица X — левая обратная к матрице A ($X \cdot A = E$); третье равенство основано на свойстве 13 определителей (определитель произведения матриц равен произведению их определителей); в четвертом равенстве использовано допущение о том, что матрица A является особенной ($|A| = 0$); и, наконец, в последнем равенстве учтено, что произведение любого числа на нуль есть нуль. Приравнивая между собой левую и правую части данной цепочки равенств, приходим к противоречию: $1 = 0$. Это означает, что принятое нами допущение о существовании матрицы X, левой обратной к матрице A, является ошибочным. Следовательно, не существует матрицы, левой обратной к особенной матрице. Аналогичным способом доказывается, что не существует и матрицы, правой обратной к особенной матрице.

Итак, действительно особенные матрицы не имеют обратных матриц.

2) Теперь рассмотрим неособенную матрицу A, то есть матрицу с не равным нулю определителем ($\Delta = |A| \neq 0$). Составим для нее взаимную матрицу $\widetilde{A}$. Согласно теореме 7.1, выполняется соотношение (7.8):

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = \Delta E.$$

Разделим все части этого соотношения на определитель Δ (это можно сделать, так как $\Delta \neq 0$):

$$A \cdot \frac{\widetilde{A}}{\Delta} = \frac{\widetilde{A}}{\Delta} \cdot A = E.$$

Отсюда, по определению обратной матрицы, следует, что матрица $\dfrac{\widetilde{A}}{\Delta}$ является обратной к матрице A. Таким образом, имеем:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\Delta},$$

то есть формула (7.9) верна.

3) Остается доказать единственность найденной обратной матрицы. Пусть наряду с обратной матрицей $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{\Delta}$ существует еще матрица X, левая обратная к A, так что

$$X \cdot A = E.$$

Умножим обе части этого равенства справа на A^{-1}:

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1}.$$

Пользуясь ассоциативностью операции умножения матриц и основным свойством единичной матрицы (7.3), получаем из данного равенства:

$$X\cdot(A\cdot A^{-1}) \;=\; A^{-1}.$$

А так как A^{-1} — матрица, обратная к A, то $A\cdot A^{-1} = E$, значит,

$$X\cdot E \;=\; A^{-1}.$$

Отсюда вытекает, по основному свойству единичной матрицы, что

$$X \;=\; A^{-1}.$$

Таким образом, матрица X, левая обратная к A, совпадает с матрицей A^{-1}. Аналогично доказывается, что и любая матрица, правая обратная к A, совпадает с A^{-1}. Следовательно, матрица A^{-1} вида (7.9) действительно является единственной матрицей, обратной к матрице A.

Итак, мы доказали, что, во-первых, особенные матрицы не имеют обратных матриц, во-вторых, всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу вида (7.9) и, в-третьих, эта обратная матрица является единственной. Тем самым все положения теоремы 7.2 доказаны.

Определение. *Квадратная матрица A, имеющая обратную матрицу, называется* ***обратимой***.

Из теоремы 7.2 следует, что квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она является неособенной. Это означает, что *обратимость* и *неособенность* (*невырожденность*) — понятия эквивалентные.

Заметим, что прилагательные «обратимая» и «обратная» относятся к разным матрицам. *Обратимой* является матрица A (если она имеет обратную матрицу). *Обратной* является матрица A^{-1} (если она существует).

Свойства обратной матрицы

1) Матрица, обратная к обратной матрице, совпадает с исходной матрицей, точнее, для любой неособенной квадратной матрицы A выполняется равенство

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2) Операции обращения матрицы и транспонирования матрицы можно менять местами, иными словами, для любой неособенной квадратной матрицы A имеет место равенство

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

3) Произведение $A\cdot B$ неособенных квадратных матриц A и B одного порядка является неособенной матрицей, при этом

$$(A\cdot B)^{-1} \;=\; B^{-1}\cdot A^{-1}, \tag{7.10}$$

то есть матрица, обратная к произведению двух матриц, равна произведению их обратных матриц, *взятых в противоположном порядке*.

Свойство 3, очевидно, может быть распространено на любое число сомножителей. Например, если A, B, C и D — неособенные квадратные матрицы одного порядка, то

$$(A \cdot B \cdot C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1},$$

где, подчеркнем, справа стоит произведение обратных матриц, взятых в порядке, противоположном порядку исходных матриц в левой части формулы.

4) Определитель матрицы A^{-1}, обратной к неособенной квадратной матрице A, равен величине, обратной к определителю матрицы A:

$$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}. \qquad (7.11)$$

Это свойство обратных матриц совпадает с 14-м свойством определителей.

В левой части выражения (7.11) верхний индекс «–1» есть символ обратной матрицы, в средней части он же — показатель степени при числе $|A|$.

Доказательство свойства 1. Пусть A — неособенная квадратная матрица. По теореме 7.2, она обратима, то есть для нее существует обратная матрица A^{-1}. Заменим в зависимости (7.6), определяющей обратную матрицу, ее обозначение A^{-1} на B. Тогда эта зависимость примет вид

$$A \cdot B = B \cdot A = E. \qquad (*)$$

Согласно определению обратной матрицы, если выполняется зависимость (∗), то матрица B называется обратной к A (и обозначается A^{-1}). Обратим внимание на то обстоятельство, что матрицы A и B входят в (∗) симметричным образом (каждая из них участвует в произведении один раз в роли первого сомножителя и один раз в роли второго сомножителя). Следовательно, из зависимости (∗) вытекает, что не только матрица B является обратной к матрице A, но и матрица A, в свою очередь, является обратной к B, то есть $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$. Отсюда $(A^{-1})^{-1} = A$, что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 2. Пусть A — неособенная квадратная матрица. По теореме 7.2, существует обратная к ней матрица A^{-1}. Эта матрица удовлетворяет зависимости (7.6):

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Подвергнем транспонированию все три входящие сюда матрицы. Так как при транспонировании равенство матриц не нарушается, то

$$(A \cdot A^{-1})' = (A^{-1} \cdot A)' = E'.$$

Отсюда, применяя правило транспонирования произведения матриц (2.5) и учитывая симметричность единичной матрицы ($E' = E$), получаем:

$$(A^{-1})' \cdot A' = A' \cdot (A^{-1})' = E.$$

Из этой зависимости, по определению обратной матрицы, вытекает, что матрица $(A^{-1})'$ есть обратная к A', то есть действительно $(A^{-1})' = (A')^{-1}$. Свойство 2 доказано.

Доказательство свойства 3. Пусть A и B — неособенные квадратные матрицы одного порядка. Тогда определено их произведение $A \cdot B$, и оно тоже является квадратной матрицей, поэтому существует определитель $|A \cdot B|$. По свойству 13 определителей, он равен произведению определителей матриц A и B:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Из неособенности матриц A и B вытекает, что $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$, значит, правая часть данного равенства отлична от нуля. Поэтому левая его часть тоже отлична от нуля, то есть $|A \cdot B| \neq 0$. Это означает, что произведение $A \cdot B$ — неособенная матрица. Следовательно, по теореме 7.2, существует обратная к $A \cdot B$ матрица $(A \cdot B)^{-1}$. Докажем, что этой обратной матрицей является матрица $B^{-1} \cdot A^{-1}$ (существование матриц A^{-1} и B^{-1} вытекает из неособенности матриц A и B).

Составим произведение $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})$ и преобразуем его таким образом:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E,$$

здесь первое преобразование основано на ассоциативности операции умножения матриц; при втором преобразовании учтено, что матрица B^{-1} является обратной к B; при третьем преобразовании использовано основное свойство единичной матрицы; четвертое преобразование отражает тот факт, что матрица A^{-1} является обратной к A.

Теперь произведем аналогичные преобразования над произведением $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B)$:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E,$$

здесь мы снова воспользовались ассоциативностью операции умножения матриц, основным свойством единичной матрицы E и тем фактом, что матрицы A^{-1} и B^{-1} являются обратными соответственно к A и B.

На основании двух выписанных цепочек равенств можем записать:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E.$$

Отсюда, по определению обратной матрицы, вытекает, что матрица $B^{-1} \cdot A^{-1}$ является обратной к матрице $A \cdot B$:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}.$$

Таким образом, формула (7.10) верна. Доказательство свойства 3 завершено.

Доказательство свойства 4. Пусть A — неособенная квадратная матрица. По теореме 7.2, существует обратная к ней матрица A^{-1}, которая, согласно (7.6), удовлетворяет равенству

$$A^{-1} \cdot A = E.$$

Так как определители равных матриц равны, то отсюда следует, что

$$|A^{-1} \cdot A| = |E|.$$

Из этого равенства, используя свойство 13 определителей и тот факт, что определитель единичной матрицы есть единица, находим:

$$|A^{-1}||A| = 1.$$

Следовательно, $|A^{-1}| = 1/|A|$, то есть формула (7.11) верна. Свойство 4 доказано.

Следствие. *Матрица A^{-1}, обратная к неособенной квадратной матрице A, является неособенной, то есть* $|A^{-1}| \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что A — неособенная квадратная матрица. Это означает, что определитель $|A|$ отличен от нуля. Поэтому обратная к нему величина тоже не равна нулю, то есть $|A|^{-1} \neq 0$. А так как, согласно свойству 4, $|A|^{-1} = |A^{-1}|$, то $|A^{-1}| \neq 0$. Значит, матрица A^{-1} действительно является неособенной.

Отметим, что данное следствие может быть доказано и с помощью свойства 1 обратной матрицы. Действительно, из этого свойства вытекает, что для любой неособенной матрицы A существует матрица, обратная к A^{-1}. А поскольку, согласно теореме 7.2, обратные матрицы существуют только у неособенных матриц, то, следовательно, матрица A^{-1} неособенная.

Внимание! При доказательстве свойства 1 мы заменили в зависимости (7.6) обозначение обратной матрицы A^{-1} на B, в результате чего эта зависимость приобрела вид

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

В связи с тем, что данная зависимость служит определением обратной матрицы и матрицы A и B входят в нее симметричным образом, из этой зависимости непосредственно следует, что *свойство быть обратной матрицей является взаимным*: *если некоторая матрица B служит обратной для матрицы A, то и, наоборот, матрица A служит обратной для матрицы B.*

Алгоритм вычисления обратной матрицы продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Вычисляем определитель матрицы A и делаем заключение о существовании или не существовании обратной матрицы A^{-1}:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot(-10) - 1\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot(-10) =$$

$$= 0 + 0 - 30 - 0 - 12 + 40 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}.$$

Сделанный вывод о существовании обратной матрицы A^{-1} основан на теореме 7.2, согласно которой всякая неособенная матрица (то есть матрица, определитель которой отличен от нуля) имеет обратную матрицу. Отметим, что если бы определитель матрицы A оказался равным нулю, то на этом решение задачи следовало бы закончить, так как, по теореме 7.2, такая матрица не имеет обратной матрицы.

2) Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&4\\-10&2\end{vmatrix}=+40;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}=-6;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0\\0&-10\end{vmatrix}=-30;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1\\-10&2\end{vmatrix}=-14;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=+2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&-10\end{vmatrix}=+10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix}=+8;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=-6.$$

3) Составляем матрицу S_A, союзную к матрице A:

$$S_A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&-6&-30\\-14&2&10\\8&-1&-6\end{pmatrix}.$$

4) Строим матрицу $\widetilde{A}$, взаимную (присоединенную) к матрице A:

$$\widetilde{A}=S'_A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&-14&8\\-6&2&-1\\-30&10&-6\end{pmatrix}.$$

5) Вычисляем матрицу A^{-1}, обратную к матрице A:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\widetilde{A}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}40&-14&8\\-6&2&-1\\-30&10&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20&7&-4\\3&-1&\frac{1}{2}\\15&-5&3\end{pmatrix}.$$

6) Делаем проверку (то есть убеждаемся в том, что найденная матрица A^{-1} удовлетворяет зависимости (7.6), определяющей обратную матрицу; при этом достаточно проверить выполнение любого из равенств, вытекающих из (7.6): $A\cdot A^{-1}=E$ или $A^{-1}\cdot A=E$):

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&4\\0&-10&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-20&7&-4\\3&-1&\frac{1}{2}\\15&-5&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-20)+2\cdot3+1\cdot15 & 1\cdot7+2\cdot(-1)+1\cdot(-5) & 1\cdot(-4)+2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot3\\ 3\cdot(-20)+0\cdot3+4\cdot15 & 3\cdot7+0\cdot(-1)+4\cdot(-5) & 3\cdot(-4)+0\cdot\frac{1}{2}+4\cdot3\\ 0\cdot(-20)+(-10)\cdot3+2\cdot15 & 0\cdot7+(-10)\cdot(-1)+2\cdot(-5) & 0\cdot(-4)+(-10)\cdot\frac{1}{2}+2\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-20&7&-4\\3&-1&\frac{1}{2}\\15&-5&3\end{pmatrix}.$$

Дополнительная литература

1. *Боревич З. И.* Определители и матрицы. — 4-е изд. — СПб.: Изд-во «Лань», 2004. — 185 с.
2. *Ильин В. А.*, *Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — 3-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 295 с.
3. *Кремер Н. Ш.*, *Путко Б. А.*, *Тришин И. М.*, *Фридман М. Н.* Высшая математика для экономических специальностей. Часть 1. — М.: Высшее образование, 2005. — 487 с.

Содержание

Лаврентий Семёнович Шихобалов

Матрицы и определители

Учебное пособие

Оригинал-макет выполнен Л. С. Шихобаловым